Chapitre 8: fonctions usuelles

HEI 1 - 2012/2013

I. Logarithme néperien, exponentielle et puissances

Ces fonctions ont été étudiées au Lycée. Il s'agit ici de rappeler leurs principales propriétés.

1. Logarithme néperien

Définition.

La fonction *logarithme néperien*, notée ln, est l'unique primitive sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Autrement dit, ln est définie par :

$$\begin{array}{rccl} \ln : &]0,+\infty[& \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt \end{array}$$

Propriété (Autour de la dérivabilité)**.**

La fonction ln est de classe $\mathbf{C}^\infty$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$\ln' x = \frac{1}{x}.$$

Elle est strictement croissante.

Propriété (Morphisme et conséquences)**.**

Soit $x, y \in]0,+\infty[$. Alors,

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\ln \dfrac{1}{x} = -\ln x$
- $\ln \dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y$
- Pour tout $r \in \mathbf{Q}$, $\ln x^r = r \ln x$
- Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $x_1, \cdots, x_n \in]0,+\infty[$, $\ln \displaystyle\prod_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \ln x_i$

Propriété (Limites aux bornes).

- $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

Propriété (Au voisinage de 1).

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

Remarque. En fait, au voisinage de 1, on a :

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + ... + (-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n} + (x-1)^n \epsilon(x)$$

Définition.

On appelle *nombre de Néper*, et on note e, l'unique réel tel que $\ln e = 1$.

Représentation graphique

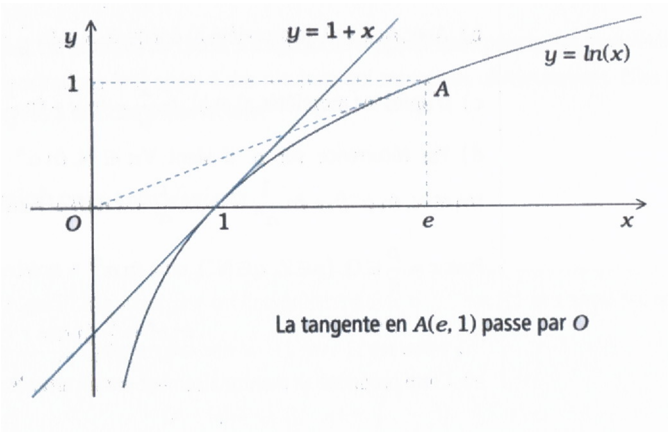

Figure 1 – Représentation graphique du logarithme néperien

Remarque. Le logarithme néperien permet de définir le logarithme de base $a > 0$ et $a \neq 1$:

$$\begin{array}{rrcl} \log_a : &]0, +\infty[& \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{\ln x}{\ln a} \end{array}$$

Le logarithme de base e (resp. 10) est le logarithme néperien (resp. décimal).

2. Exponentielle

Définition.

La fonction *exponentielle*, notée exp, est la bijection réciproque du logarithme néperien. C'est donc la bijection de $\mathbf{R}$ sur $]0,+\infty[$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in]0,+\infty[,\ y = \exp x \Longleftrightarrow x = \ln y$$

Propriété (Autour de la dérivabilité)**.**

La fonction exp est de classe $\mathbf{C}^\infty$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\exp' x = \exp x.$$

Elle est strictement croissante.

Propriété (Morphisme et conséquences)**.**

Soit $x, y \in \mathbf{R}$. Alors,
- $\exp(x+y) = \exp x \exp y$
- $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}$
- $\exp(x-y) = \dfrac{\exp x}{\exp y}$
- Pour tout $r \in \mathbf{Q}$, $\exp(rx) = (\exp x)^r$
- Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{R}$, $\exp \sum_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n} \exp x_i$

L'avant dernière propriété nous assure que la fonction exponentielle est un prolongement (continu) de :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Q} & \to & \mathbf{R} \\ r & \mapsto & e^r \end{array}$$

Notation. Pour tout x réel, $\exp x$ pourra donc être noté e^x.

Avec cette notation, les propriétés précédentes se réécrivent :
- $e^{x+y} = e^x e^y$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $e^{rx} = (e^x)^r$

Propriété (Limites aux bornes)**.**

- $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Propriété (Au voisinage de 0)**.**

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Remarque. En fait, au voisinage de 0, on a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)$$

Représentation graphique

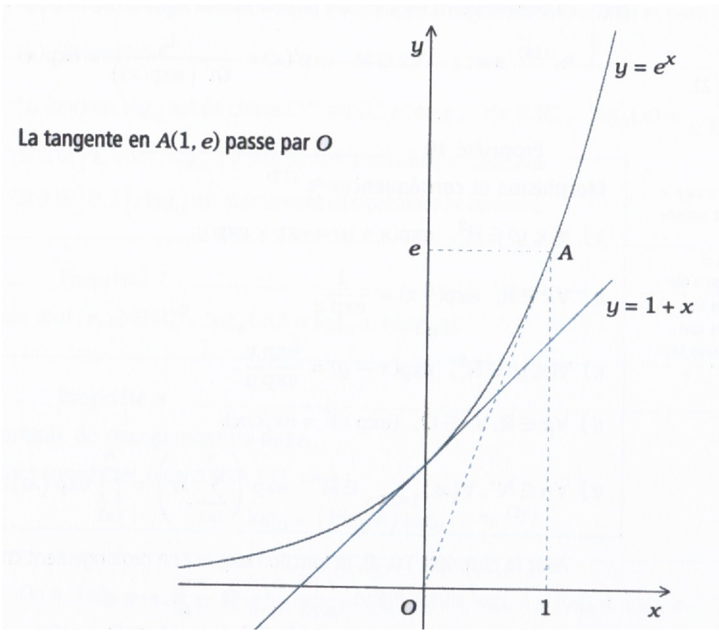

Figure 2 – Représentation graphique de l'exponentielle

Remarque. L'exponentielle de base $a > 0$ est la bijection réciproque de la fonction logarithme de base a.

3. Fonctions puissances

Définition.

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.
La fonction *puissance* α, notée P_α, est définie par :

$$\begin{array}{rccl} P_\alpha : &]0, +\infty[& \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & P_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \end{array}$$

Remarque. Pour $\alpha > 0$, en posant $P_\alpha(0) = 0$, on obtient une fonction continue sur $\mathbf{R}^+$.

Propriété (Autour de la dérivabilité).

La fonction P_α est de classe $\mathbf{C}^\infty$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$P'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Elle est croissante si $\alpha > 0$ et décroissante si $\alpha < 0$.

Représentation graphique

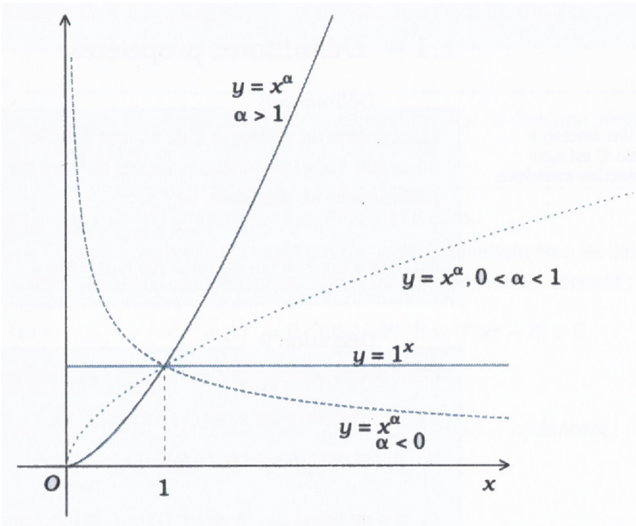

FIGURE 3 – Représentation graphique des puissances

4. Croissances comparées

Théorème.

Soit $\alpha, \beta \in]0, +\infty[$. Alors,

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(lnx)^\alpha}{x^\beta} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0$

Théorème.

Soit $\alpha \in]0, +\infty[$. Alors,

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^x = 0$

Remarque. Les théorèmes précédents restent vrais avec $\alpha < 0$ mais alors il n'y a plus d'indétermination.

II. Fonctions circulaires et fonctions circulaires réciproques

On se concentre ici sur les fonctions circulaires réciproques.

1. Définitions et premières propriétés

Définition.

La fonction sinus est continue, strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\sin\left([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\right) = [-1, 1]$. Elle induit une bijection s de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$. La bijection réciproque de s est appelée *arc sinus* et notée arcsin. Autrement dit :

$$u = \arcsin x,\ x \in [-1, 1] \Longleftrightarrow x = \sin u,\ u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Propriété.

- Pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin x) = x$
- Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin(\arcsin x) = x$

Attention à l'intervalle de validité : $\arcsin(\sin 2\pi) = \arcsin(\sin 0) = 0 \neq 2\pi$

Définition.

La fonction cosinus est continue, strictement décroissante sur $[0, \pi]$ et $\cos\left([0, \pi]\right) = [-1, 1]$. Elle induit une bijection c de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. La bijection réciproque de c est appelée *arc cosinus* et notée arccos. Autrement dit :

$$u = \arccos x,\ x \in [-1, 1] \Longleftrightarrow x = \cos u,\ u \in [0, \pi]$$

Propriété.

- Pour tout $x \in [0, \pi]$, $\arccos(\cos x) = x$
- Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\cos(\arccos x) = x$

Définition.

La fonction tangente est continue, strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\tan\left(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right) = \mathbf{R}$. Elle induit une bijection t de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbf{R}$. La bijection réciproque de t est appelée *arc tangente* et notée arctan. Autrement dit :

$$u = \arctan x,\ x \in \mathbf{R} \Longleftrightarrow x = \tan u,\ u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

Propriété.

- Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\arctan(\tan x) = x$
- Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\tan(\arctan x) = x$

2. Représentations graphiques

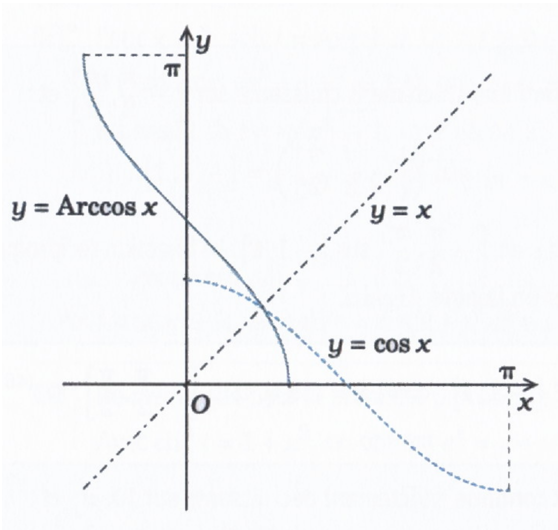

FIGURE 4 – Représentation graphique de arc cosinus

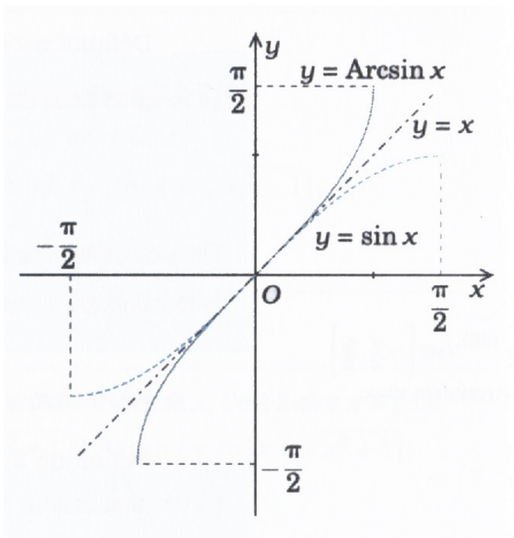

FIGURE 5 – Représentation graphique de arc sinus

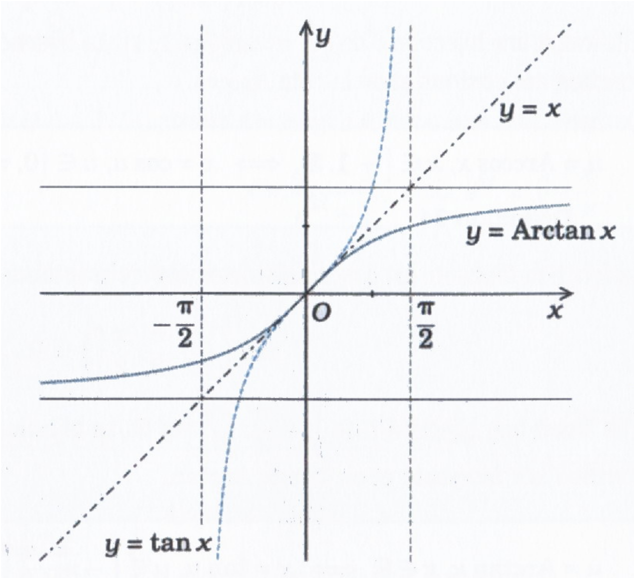

FIGURE 6 – Représentation graphique de arc tangente

3. Dérivation

Propriété.

La fonction arc cosinus est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Propriété.

La fonction arc sinus est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Propriété.

La fonction arc tangente est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

Remarque. Les développements limités des fonctions circulaires réciproques se retrouvent aisément en primitivant le développement limité de leur dérivée.

III. Fonctions hyperboliques

1. Fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique

Définition.

La fonction cosinus hyperbolique, notée ch, et la fonction sinus hyperbolique, notée sh, sont définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad , \quad \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

Propriété (Premières formules)**.**

Pour tout $x \in \mathbf{R}$,
- $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$
- $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$
- $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

Propriété (En vrac)**.**

- Les fonctions ch et sh sont respectivement paire et impaire
- Elles sont de classe $\mathbf{C}^\infty$, $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$ et $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$
- sh est croissante sur $\mathbf{R}$, ch est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$

Remarque. Les développements limités en zéro des fonctions hyperboliques se retrouvent aisément grâce à leurs définitions et on a, pour x proche de 0 :
- $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\epsilon(x)$
- $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\epsilon(x)$

Représentation graphique

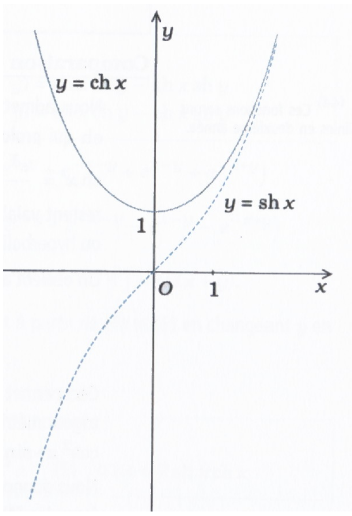

FIGURE 7 – Représentation graphique de ch et sh

Représentation paramétrique d'une hyperbole
Soit $a, b > 0$ et H l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Alors, H est la réunion des deux demi-hyperboles H_+ et H_- contenues respectivement dans les demi-plans $x \geq 0$ et $x \leq 0$ paramétrées par :

$$H_+ : \begin{cases} x = a\operatorname{ch} t \\ y = b\operatorname{sh} t \end{cases} \quad H_- : \begin{cases} x = -a\operatorname{ch} t \\ y = b\operatorname{sh} t \end{cases} \quad , t \in \mathbf{R}$$

Remarque. Cette représentaion paramétrique d'une hyperbole (avec les fonctions hyperboliques) est à rapprocher de la représentation paramétrique (avec les fonctions circulaires) :
– du cercle d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ par $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$
– de l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ par $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$

2. Fonction tangente hyperbolique

Définition.

La fonction tangente hyperbolique, notée th, est définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

Propriété (En vrac)**.**

- La fonction th est impaire
- Elle est de classe $\mathbf{C}^\infty$ et $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2 = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2}$
- Elle est croissante sur $\mathbf{R}$

Représentation graphique

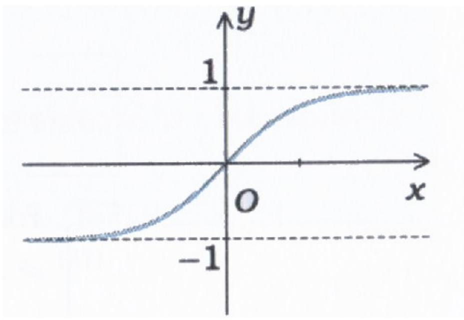

FIGURE 8 – Représentation graphique de th

IV. Fonctions hyperboliques réciproques

Les applications ch, sh et th induisent des bijections continues et strictement croissantes respectivement de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$, de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$ et de $\mathbf{R}$ sur $]-1, 1[$.
Leurs réciproques sont les fonctions hyperboliques réciproques.

Définition.

1. La fonction *argument cosinus hyperbolique*, notée argch , est définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$y = \operatorname{argch} x,\ x \geq 1 \iff x = \operatorname{ch} y,\ y \geq 0$$

2. La fonction *argument sinus hyperbolique*, notée argsh , est définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$y = \operatorname{argsh} x,\ x \in \mathbf{R} \iff x = \operatorname{sh} y,\ y \in \mathbf{R}$$

3. La fonction *argument tangente hyperbolique*, notée argth , est définie sur $]-1, 1[$ par :

$$y = \operatorname{argth} x,\ x \in]-1, 1[\iff x = \operatorname{th} y,\ y \in \mathbf{R}$$

Propriété (Dérivation)**.**

1. Pour tout $x \in]1, +\infty[$, $\operatorname{argch}' x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.
2. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{argsh}' x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
3. Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\operatorname{argth}' x = \dfrac{1}{1 - x^2}$.

Remarque. Les fonctions argsh et argth possèdent des développements limités en 0, qui se retrouvent aisément grâce à leurs dérivées ou leurs expressions logarithmiques. Par contre, la fonction argch, non définie en zéro n'y possède pas de DL...

Représentations graphiques

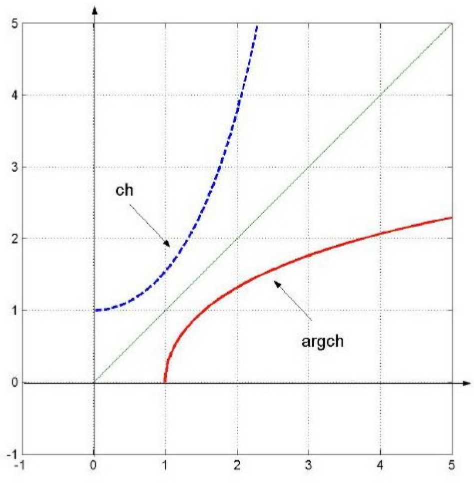

Figure 9 – Représentation graphique de argch

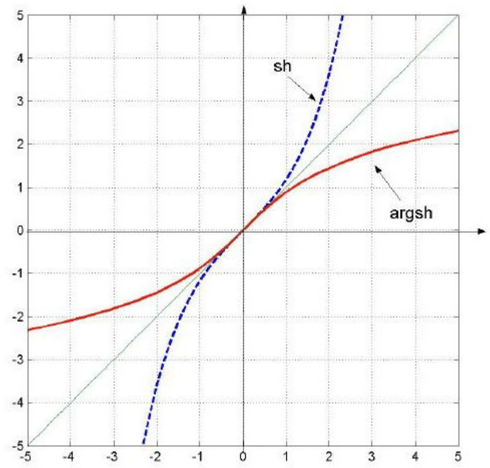

FIGURE 10 – Représentation graphique de argsh

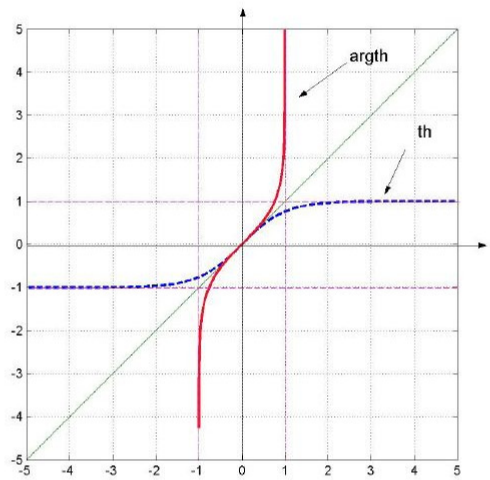

FIGURE 11 – Représentation graphique de argth